《目次》

第１講　総合演習（その１）……… 2
第２講　総合演習（その２）……… 4
第３講　総合演習（その３）……… 6
第４講　総合演習（その４）……… 8

《第１講　総合演習(その１)》

1　以下の問い（問１～３）に答えよ．

問１　複素数に関する以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1)　複素数 $z=x+iy$ (x，y は実数)の共役複素数を $\overline{z}$ とする．x と y を z と $\overline{z}$ を用いて表せ．

(2)　(1)の複素数 z の絶対値を x と y を用いて表せ．

(3)　方程式 $z^3=8$ の３つの解を求めよ．

(4)　任意の自然数 n に対して次式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

問２　以下の定積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

問３　点Ｐの位置ベクトルの成分 x，y，z が時刻 t を媒介変数として

$$x(t)=t^3+t,\ \ y(t)=\sqrt{3}\,t^2,\ \ z(t)=2\sqrt{2}\,t$$

で表されている．

(1)　時刻 t における点Ｐの速度ベクトル $\vec{v}$ の成分と大きさを求めよ．

(2)　時刻 t における点Ｐの加速度ベクトル $\vec{a}$ の成分と大きさを求めよ．

(3)　点Ｐが時刻 $t=0$ から $t=1$ までに移動した道のり(軌道の長さ) s を求めよ．

2　関数 $f(x)$ は第 2 次導関数をもち，すべての実数 x に対して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　実数 x と a に対して，不等式

$$f(x) \geqq f(a) + f'(a)(x-a)$$

が成り立つことを示せ.

(2)　関数 $g(t)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ で連続であるとする．このとき，問 1 において $x = g(t)$, $a = \int_0^1 g(s)\,ds$ とおくことにより，不等式

$$\int_0^1 f(g(t))\,dt \geqq f\left(\int_0^1 g(s)\,ds\right)$$

が成り立つことを示せ.

《第２講　総合演習（その２）》

3　一つの面が赤，もう一つの面が黒に塗られたカード１枚が，赤い面を上にして置いてある．また，点Ｑは数直線上の原点にある．カード面の色に応じて，次の操作を繰り返し行う．

- カードが赤い面を上にして置かれているとき，表の出る確率が $\frac{1}{10}$ のコインを投げる．コインの表が出ればカードをひっくり返し，点Ｑを正の方向に１動かす．コインの裏が出ればカードはそのままにして，点Ｑは動かさない．
- カードが黒い面を上にして置かれているとき，表の出る確率が $\frac{2}{5}$ のコインを投げる．コインの表が出ればカードをひっくり返し，点Ｑは動かさない．コインの裏が出ればカードはそのままにし，点Ｑを負の方向に１動かす．

上記のいずれの操作においても，コインを投げるときコインの表が出るか裏が出るか，必ずどちらか一方が起こるものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　自然数 n に対し，上の操作を n 回繰り返した後，カードが赤い面を上にして置かれている確率を P_n とする．P_{n+1} を P_n を用いて表せ．

(2)　P_n を(1)で定めた確率とする．P_n を n を用いて表し，極限値

$$\lim_{n\to\infty} P_n$$

を求めよ．

(3)　上の操作を２回繰り返した後，点Ｑが原点にある確率を求めよ．

(4)　上の操作を２回繰り返した後，点Ｑが原点にあるとする．この条件のもとで，カードが赤い面を上にして置かれている確率を求めよ．

4　曲線 $y=3e^{-2x}$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ 3e^{-2t})$ がある．ただし，$t>0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　点Ｐにおける接線の方程式を求めよ．

(2)　曲線 $y=3e^{-2x}$ と(1)で求めた接線，および y 軸で囲まれた図形の面積 S_1 を t で表せ．

(3)　(1)で求めた接線と x 軸，および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_2 が最大となる t，およびそのときの S_2 の値を求めよ．

(4)　(2)と(3)で定義した S_1，S_2 に対し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S_1+S_2)$ を求めよ．

《第３講　総合演習（その３）》

5　座標平面上の点 A$(1,\ 2)$ と点 B$(-1,\ -2)$ からの距離の差が 2 であるように動く点が描く双曲線を C とする．以下の問いに答えよ．

(1)　変数 t を実数として，x 軸上の点 Q$(t,\ 0)$ を考える．線分 AQ の長さと線分 BQ の長さの差を $g(t)$ とする．極限値

$$\lim_{t\to\infty} g(t)$$

を求めよ．

(2)　双曲線 C の方程式を求めよ．ただし，答えは

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ は実数$)$ の形に書くこと．

(3)　方程式 $y=mx$ で表される直線と，双曲線 C が共有点を持つような実数 m の範囲を求めよ．

6　関数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $(x \geqq 1)$ と関数 $g(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ $(t \geqq 0)$ を考える．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $g(t) \geqq 1$ を示せ．

(2) $a>0$ とする．定積分 $\displaystyle\int_0^a f(g(t))g'(t)\,dt$ を求めよ．

(3) 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．$p>1$ とし，C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線を l とする．このとき，曲線 C，直線 l，x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ．

《第４講　総合演習（その４）》

7　連立不等式

$$y \geqq 0,\quad y^2 - 2xy + 2x^2 - 1 \leqq 0$$

が表す xy 平面上の領域を x 軸のまわりに１回転してできる立体を D とする以下の問に答えよ．

(1)　不等式 $x - \sqrt{1 - x^2} \geqq 0$ を解け．

(2)　不等式 $x + \sqrt{1 - x^2} \geqq 0$ を解け．

(3)　t を $-1 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数とする．xy 平面上の点 $(t,\ 0)$ を通り x 軸と垂直な平面による D の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，この平面と D の共通部分がない場合は $S(t) = 0$ とする．

(4)　D の体積 V を求めよ．

8　a，c を正の実数，b を複素数とする．すべての複素数 z に対して，不等式

$$a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c \geqq 0$$

が成り立っているとする．以下の問いに答えよ．

(1)　不等式 $|b|^2-ac \leqq 0$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての複素数 z に対して，不等式

$$a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c \leqq (a+c)\left(1+|z|^2\right)$$

が成り立つことを示せ．

テキスト解答

《第１講　総合演習(その１)》

1　以下の問い（問１～３）に答えよ．

問１　複素数に関する以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1)　複素数 $z=x+iy$ (x，y は実数)の共役複素数を $\overline{z}$ とする．x と y を z と $\overline{z}$ を用いて表せ．

(2)　(1)の複素数 z の絶対値を x と y を用いて表せ．

(3)　方程式 $z^3=8$ の３つの解を求めよ．

(4)　任意の自然数 n に対して次式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

問２　以下の定積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

問３　点Ｐの位置ベクトルの成分 x，y，z が時刻 t を媒介変数として

$$x(t)=t^3+t,\ \ y(t)=\sqrt{3}\,t^2,\ \ z(t)=2\sqrt{2}\,t$$

で表されている．

(1)　時刻 t における点Ｐの速度ベクトル $\vec{v}$ の成分と大きさを求めよ．

(2)　時刻 t における点Ｐの加速度ベクトル $\vec{a}$ の成分と大きさを求めよ．

(3)　点Ｐが時刻 $t=0$ から $t=1$ までに移動した道のり(軌道の長さ) s を求めよ．

【答】　問１　(1)　$x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$，$y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$　(2)　$\sqrt{x^2+y^2}$　(3)　$z=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i$　(4)　略

問２　(1)　$1-\dfrac{1}{e}$　(2)　$1-\dfrac{2}{e}$　(3)　$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

問３　(1)　$\vec{v}=\left(3t^2+1,\ 2\sqrt{3}\,t,\ 2\sqrt{2}\right)$，$|\vec{v}|=3(t^2+1)$

(2)　$\vec{a}=\left(6t,\ 2\sqrt{3},\ 0\right)$，$|\vec{a}|=2\sqrt{9t^2+3}$　(3)　4

【解説】　問１　(1)　$z=x+iy$ より $\overline{z}=x-iy$ なので，$z+\overline{z}=2x$．よって $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$．

また，$z-\overline{z}=2iy$．よって $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$．

(2)　$|z|^2=z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$ なので $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$．

(3)　$z^3=8\iff(z-2)(z^2+2z+4)=0$ なので $z=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i$．

(4)　$n=1$ のとき，(左辺)$=\cos 1\theta+i\sin 1\theta=\cos\theta+i\sin\theta$，

(右辺)$=(\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos\theta+i\sin\theta$ となるので，与式は成立する．

$n=k(\geqq 1)$ のとき $\cos k\theta+i\sin k\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^k$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta+i\sin\theta)^k\ (\cos\theta+i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &= \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

より $n=k+1$ のときにも与式が成り立つ．

以上より，数学的帰納法により $\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ が示された．

問２　(1)　$\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=1-\frac{1}{e}$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx=\Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^1=1-\frac{2}{e}$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

問３　(1)　$x'(t)=3t^2+1,\ y'(t)=2\sqrt{3}\,t,\ z'(t)=2\sqrt{2}$ なので $\vec{v}=\left(3t^2+1,\ 2\sqrt{3}\,t,\ 2\sqrt{2}\right)$ であり

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{(3t^2+1)^2+\left(2\sqrt{3}\,t\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{9(t^2+1)^2}\\ &= 3(t^2+1)\end{aligned}$$

(2)　$x''(t)=6t,\ y''(t)=2\sqrt{3},\ z''(t)=0$ なので $\vec{a}=\left(6t,\ 2\sqrt{3},\ 0\right)$ であり

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{(6t)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2+0^2}\\ &= \sqrt{12(3t^2+1)}\\ &= 2\sqrt{9t^2+3}\end{aligned}$$

(3)　(1)より $|\vec{v}|=3(t^2+1)$ なので

$$\begin{aligned}s &= \int_0^1|\vec{v}|\,dt\\ &= \int_0^1\{3(t^2+1)\}\,dt\\ &= \Big[t^3+3t\Big]_0^1\\ &= 4\end{aligned}$$

2　関数 $f(x)$ は第２次導関数をもち，すべての実数 x に対して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　実数 x と a に対して，不等式

$$f(x) \geqq f(a) + f'(a)(x-a)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　関数 $g(t)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ で連続であるとする．このとき，問１において $x = g(t)$，$a = \int_0^1 g(s)\,ds$ とおくことにより，不等式

$$\int_0^1 f(g(t))\,dt \geqq f\left(\int_0^1 g(s)\,ds\right)$$

が成り立つことを示せ．

【答】 (1)　略　　(2)　略

【解説】 (1)　$h(x) = f(x) - \{f(a) + f'(a)(x-a)\}$ とおくと

$h(x) = f(x) - f'(a)x + af'(a) - f(a)$ より

$h'(x) = f'(x) - f'(a)$，$h''(x) = f''(x) \geqq 0$ であり，$h'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$ なので

$x \leqq a$ のとき $h'(x) \leqq 0$，$x \geqq a$ のとき $h'(x) \geqq 0$ となる．

よって $h(x) \geqq h(a) = 0$ より $f(x) \geqq f(a) + f'(a)(x-a)$ が示された．

(2)　(1)の結果より $f(g(t)) \geqq f(a) + f'(a)(g(t)-a) = f'(a)g(t) + f(a) - af'(a)$ であるので

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(g(t))\,dt &\geqq \int_0^1 \{f'(a)g(t) + f(a) - af'(a)\}\,dt \\
&= f'(a)\int_0^1 g(t)\,dt + (f(a) - af'(a))\int_0^1 dt \\
&= f'(a) \times a + (f(a) - af'(a)) \times 1 \\
&= f(a) \\
&= f\left(\int_0^1 g(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

よって与えられた不等式が示された．

《第２講　総合演習（その２）》

3　一つの面が赤，もう一つの面が黒に塗られたカード１枚が，赤い面を上にして置いてある．また，点Qは数直線上の原点にある．カード面の色に応じて，次の操作を繰り返し行う．

- カードが赤い面を上にして置かれているとき，表の出る確率が $\dfrac{1}{10}$ のコインを投げる．コインの表が出ればカードをひっくり返し，点Qを正の方向に１動かす．コインの裏が出ればカードはそのままにして，点Qは動かさない．
- カードが黒い面を上にして置かれているとき，表の出る確率が $\dfrac{2}{5}$ のコインを投げる．コインの表が出ればカードをひっくり返し，点Qは動かさない．コインの裏が出ればカードはそのままにし，点Qを負の方向に１動かす．

上記のいずれの操作においても，コインを投げるときコインの表が出るか裏が出るか，必ずどちらか一方が起こるものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　自然数 n に対し，上の操作を n 回繰り返した後，カードが赤い面を上にして置かれている確率を P_n とする．P_{n+1} を P_n を用いて表せ．

(2)　P_n を(1)で定めた確率とする．P_n を n を用いて表し，極限値

$$\lim_{n\to\infty} P_n$$

を求めよ．

(3)　上の操作を２回繰り返した後，点Qが原点にある確率を求めよ．

(4)　上の操作を２回繰り返した後，点Qが原点にあるとする．この条件のもとで，カードが赤い面を上にして置かれている確率を求めよ．

【答】　(1)　$P_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_n+\dfrac{2}{5}$　(2)　$P_n=\dfrac{1}{5}\left\{4+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$，極限は $\dfrac{4}{5}$　(3)　$\dfrac{87}{100}$　(4)　$\dfrac{27}{29}$

【解説】　(1)　$n+1$ 回目に赤い面が上になるには，

- n 回目に赤い面が上になっていてコインの裏が出る．
- n 回目に黒い面が上になっていてコインの表が出る．

のいずれかなので

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n\times\frac{9}{10}+(1-P_n)\times\frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{2}P_n+\frac{2}{5} \end{aligned}$$

(2)　$P_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_n+\dfrac{2}{5}$ は $P_{n+1}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{2}\left(P_n-\dfrac{4}{5}\right)$ と変形できるので

$$P_n-\frac{4}{5}=\left(P_1-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ここで $P_1=\dfrac{9}{10}$ なので $P_n=\dfrac{1}{5}\left\{4+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$.

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{4}{5}$.

(3)　最初，カードは赤い面が上なので，

- コインの表が出た場合は，カードは黒い面が上になり，点 Q は $+1$ に移動するので，原点に進むには次のコインは裏が出ればよい.
- コインの裏が出た場合は，カードは赤い面が上のままで点 Q は原点のままなので，次のコインは裏が出れば点 Q は原点のままである.

以上より，求める確率は $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{87}{100}$.

(4)　(3)より求める条件付き確率は $\dfrac{\dfrac{9}{10}\times\dfrac{9}{10}}{\dfrac{1}{10}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{9}{10}}=\dfrac{27}{29}$.

$\boxed{4}$　曲線 $y=3e^{-2x}$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ 3e^{-2t})$ がある．ただし，$t>0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　点Pにおける接線の方程式を求めよ．

(2)　曲線 $y=3e^{-2x}$ と(1)で求めた接線，および y 軸で囲まれた図形の面積 S_1 を t で表せ．

(3)　(1)で求めた接線と x 軸，および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_2 が最大となる t，およびそのときの S_2 の値を求めよ．

(4)　(2)と(3)で定義した S_1，S_2 に対し，$\lim_{t\to\infty}(S_1+S_2)$ を求めよ．

【答】 (1)　$y=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$　　(2)　$-\left(3t^2+3t+\frac{3}{2}\right)e^{-2t}+\frac{3}{2}$

(3)　$t=\frac{1}{2}$，$S_2=\frac{3}{e}$　　(4)　$\frac{3}{2}$

【解説】 (1)　$y=3e^{-2x}$ より $y'=-6e^{-2x}$ なので求める接線の式は

$y=(-6e^{-2t})(x-t)+3e^{-2t}=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$

よって $y=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$.

(2)　$y=3e^{-2x}$ より $y'=-6e^{-2x}$，$y''=12e^{-2x}>0$ となるので，曲線は下に凸となり，(1)で求めた接線との共有点はPのみとなる．

よって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^t 3e^{-2x}dx-\frac{\{3(2t+1)e^{-2t}+3e^{-2t}\}\times t}{2} \\ &= \left[-\frac{3}{2}e^{-2x}\right]_0^t-3t(t+1)e^{-2t} \\ &= -\left(3t^2+3t+\frac{3}{2}\right)e^{-2t}+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(3)　$y=-6e^{-2t}x+3(2t+1)e^{-2t}$ と $y=0$ より $x=t+\frac{1}{2}$ を得るので

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)\times 3(2t+1)e^{-2t}}{2} \\ &= \frac{3}{4}(2t+1)^2e^{-2t} \end{aligned}$$

となる．このとき

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S_2 &= \frac{3}{4}\{4(2t+1)e^{-2t}-2(2t+1)^2e^{-2t}\} \\ &= -\frac{3}{2}(2t+1)(2t-1)e^{-2t} \end{aligned}$$

となるから

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	∞
$S_2{}'$		$+$	0	$-$	
S_2		↗	$\frac{3}{e}$	↘	

より，$t=\dfrac{1}{2}$ のときに最大値 $\dfrac{3}{e}$ をとる．

(4)　(2)，(3)より $S_1+S_2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}e^{-2t}$ となるので $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(S_1+S_2)=\dfrac{3}{2}$．

《第３講　総合演習（その３）》

5　座標平面上の点 A(1, 2) と点 B(−1, −2) からの距離の差が 2 であるように動く点が描く双曲線を C とする．以下の問いに答えよ．

(1)　変数 t を実数として，x 軸上の点 Q(t, 0) を考える．線分 AQ の長さと線分 BQ の長さの差を $g(t)$ とする．極限値

$$\lim_{t\to\infty} g(t)$$

を求めよ．

(2)　双曲線 C の方程式を求めよ．ただし，答えは

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

(a, b, c, d, e, f は実数) の形に書くこと．

(3)　方程式 $y=mx$ で表される直線と，双曲線 C が共有点を持つような実数 m の範囲を求めよ．

【答】 (1)　2　　(2)　$4xy+3y^2-4=0$　　(3)　$m<-\dfrac{4}{3}$，$0<m$

【解説】 (1)

$$\begin{aligned} g(t) &= |\mathrm{AQ}-\mathrm{BQ}| \\ &= \left|\sqrt{(t-1)^2+4}-\sqrt{(t+1)^2+4}\right| \\ &= \left|\frac{-4t}{\sqrt{(t-1)^2+4}+\sqrt{(t+1)^2+4}}\right| \\ &= \left|\frac{-4}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{t}\right)^2+\frac{4}{t^2}}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+\frac{4}{t^2}}}\right| \to 2\ (t\to\infty) \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)=2$

(2)　C 上の点を P(x, y) とすると AP−BP＝2 のとき AP＝BP＋2 なので

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+2$$

の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} &(x-1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y+2)^2+4\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+4 \\ \iff\ &\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=-x-2y-1 \\ \iff\ &(x+1)^2+(y+2)^2=(-x-2y-1)^2 \text{ かつ } -x-2y-1\geqq 0 \\ \iff\ &4xy+3y^2-4=0 \text{ かつ } y\leqq-\frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

BP−AP＝2 のときも同様に $4xy+3y^2-4=0$ かつ $y\geqq-\dfrac{x-1}{2}$ を得る．

以上より $4xy+3y^2-4=0$．

(3)　$4xy+3y^2-4=0$ に $y=mx$ を代入して

$$4x\cdot mx+3(mx)^2-4=0 \iff m(3m+4)x^2=4$$

となるので，これが異なる２つの実数解をもつ条件は $m(3m+4)>0$ つまり

$m<-\dfrac{4}{3}$，$0<m$.

> 6　関数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $(x\geqq 1)$ と関数 $g(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ $(t\geqq 0)$ を考える．ただし，e は自然対数の底とする．
>
> (1)　$g(t)\geqq 1$ を示せ．
>
> (2)　$a>0$ とする．定積分 $\displaystyle\int_0^a f(g(t))g'(t)\,dt$ を求めよ．
>
> (3)　座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．$p>1$ とし，C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線を l とする．このとき，曲線 C，直線 l，x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ．

【答】 (1)　略　　(2)　$\dfrac{1}{8}(e^{2a}-e^{-2a})-\dfrac{1}{2}a$　　(3)　$\dfrac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)-\dfrac{\sqrt{p^2-1}}{2p}$

【解説】 (1)　$e^t>0$，$e^{-t}>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係を用いて

$$\frac{e^t+e^{-t}}{2}\geqq\sqrt{e^t\cdot e^{-t}}=1$$

よって $g(t)\geqq 1$ が示された．

(2)　$f(g(t))=\sqrt{\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$，$g'(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^a f(g(t))g'(t)\,dt &= \int_0^a\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,dt\\ &= \int_0^a\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{4}-\frac{1}{2}\right)dt\\ &= \left[\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8}-\frac{1}{2}t\right]_0^a\\ &= \frac{1}{8}(e^{2a}-e^{-2a})-\frac{1}{2}a\end{aligned}$$

(3)　$y=\sqrt{x^2-1}$ $(x\geqq 1)$ より $y^2=x^2-1$ $(x\geqq 1$ かつ $y\geqq 0)$ つまり $x^2-y^2=1$ $(x\geqq 1$ かつ $y\geqq 0)$ であることと，$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ より $x=p$ における接線は

$$y=\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}(x-p)+\sqrt{p^2-1}$$

となり，これと $y=0$ より $x=\dfrac{1}{p}$ となるので

$$S = \frac{1}{2}\times\left(p-\frac{1}{p}\right)\times\sqrt{p^2-1}-\int_1^p\sqrt{x^2-1}\,dx$$

ここで $\displaystyle\int_1^p\sqrt{x^2-1}\,dx$ において，$x=g(t)$ と置換積分すると

$p=g(t)$ より $p=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\iff e^{2t}-2pe^t+1=0$ なので $e^t=p+\sqrt{p^2-1}$ つまり

$t=\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)$ であり，$t\geqq 0$ より $\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1}=\sqrt{p^2-1}$ となる．

よって $\alpha=\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)$ とおくと $\dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}=p$, $\dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}=\sqrt{p^2-1}$ より

$$\frac{1}{8}(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})-\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\times\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}-\frac{1}{2}\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\times p\times\sqrt{p^2-1}-\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)$$ なので

$$S=\frac{1}{2}\times\left(p-\frac{1}{p}\right)\times\sqrt{p^2-1}-\left\{\frac{1}{2}\times p\times\sqrt{p^2-1}-\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)-\frac{\sqrt{p^2-1}}{2p}$$

《第４講　総合演習（その４）》

> $\boxed{7}$　連立不等式
> $$y \geqq 0,\ \ y^2-2xy+2x^2-1 \leqq 0$$
> が表す xy 平面上の領域を x 軸のまわりに１回転してできる立体を D とする以下の問に答えよ.
> (1)　不等式 $x-\sqrt{1-x^2} \geqq 0$ を解け.
> (2)　不等式 $x+\sqrt{1-x^2} \geqq 0$ を解け.
> (3)　t を $-1 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数とする．xy 平面上の点 $(t,\ 0)$ を通り x 軸と垂直な平面による D の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，この平面と D の共通部分がない場合は $S(t)=0$ とする.
> (4)　D の体積 V を求めよ.

【答】 (1)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$　　(2)　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$

(3)
$$\begin{cases} 0 & \left(-1 \leqq t < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}\right) \\ \pi\left(1+2t\sqrt{1-t^2}\right) & \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}\right) \\ 4\pi t\sqrt{1-t^2} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$
(4)　$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

【解説】 (1)　$1-x^2 \geqq 0$ より $-1 \leqq x \leqq 1$ に注意すると
$$\begin{aligned} x-\sqrt{1-x^2} \geqq 0 &\iff x \geqq \sqrt{1-x^2} \\ &\iff x \geqq 0 \text{ かつ } x^2 \geqq 1-x^2 \\ &\iff x \geqq 0 \text{ かつ } x^2 \geqq \frac{1}{2} \quad \text{よって } \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1. \end{aligned}$$

(2)　(1)と同様に $-1 \leqq x \leqq 1$ に注意すると
$$\begin{aligned} x+\sqrt{1-x^2} \geqq 0 &\iff \sqrt{1-x^2} \geqq -x \\ &\iff (-x \geqq 0 \text{ かつ } 1-x^2 \geqq x^2) \text{ または } (-x<0) \\ &\iff \left(x \leqq 0 \text{ かつ } x^2 \leqq \frac{1}{2}\right) \text{ または } (x>0) \quad \text{よって } -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1. \end{aligned}$$

(3)　$x=t$ を $y^2-2xy+2x^2-1 \leqq 0$ に代入して
$$y \geqq 0 \text{ かつ } y^2-2ty+2t^2-1 \leqq 0 \iff y \geqq 0 \text{ かつ } t-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq t+\sqrt{1-t^2}$$
$$\iff \begin{cases} t+\sqrt{1-t^2}<0 \text{ のとき } y \text{ は解なし} \\ t+\sqrt{1-t^2} \geqq 0 \text{ かつ } t-\sqrt{1-t^2}<0 \text{ のとき } 0 \leqq y \leqq t+\sqrt{1-t^2} \\ t-\sqrt{1-t^2} \geqq 0 \text{ のとき } t-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq t+\sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

なので

$$\begin{cases} -1 \leqq t < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき} & S(t)=0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき} & S(t)=\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)^2\pi \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1 \text{ のとき} & S(t)=\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)^2\pi-\left(t-\sqrt{1-t^2}\right)^2\pi \end{cases}$$

$$\text{よって } S(t)=\begin{cases} 0 & \left(-1 \leqq t < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}\right) \\ \pi\left(1+2t\sqrt{1-t^2}\right) & \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}\right) \\ 4\pi t\sqrt{1-t^2} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

(4)　(3)の結果より

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi\left(1+2t\sqrt{1-t^2}\right)dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 4\pi t\sqrt{1-t^2}\,dt \\ &= 2\pi\Big[\,t\,\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left[-\frac{4}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \end{aligned}$$

8　a，c を正の実数，b を複素数とする．すべての複素数 z に対して，不等式

$$a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c\geqq 0$$

が成り立っているとする．以下の問いに答えよ．

(1)　不等式 $|b|^2-ac\leqq 0$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての複素数 z に対して，不等式

$$a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c\leqq (a+c)\left(1+|z|^2\right)$$

が成り立つことを示せ．

【答】 (1)　略　　(2)　略

【解説】 (1)　$a\neq 0$ より

$$\begin{aligned} a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c &= a\left(z\overline{z}+\frac{b}{a}z+\frac{\overline{b}}{a}\overline{z}+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left\{\left(z+\frac{\overline{b}}{a}\right)\left(\overline{z}+\frac{b}{a}\right)-\frac{b\overline{b}}{a^2}+\frac{c}{a}\right\} \\ &= a\left|z+\frac{\overline{b}}{a}\right|^2-\frac{|b|^2-ac}{a} \end{aligned}$$

であり $a\left|z+\dfrac{\overline{b}}{a}\right|^2\geqq 0$ より $-\dfrac{|b|^2-ac}{a}\geqq 0$ となるので $|b|^2-ac\leqq 0$.

(2)

$$\begin{aligned} (a+c)\left(1+|z|^2\right)-\left\{a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c\right\} &= c|z|^2-\left(bz+\overline{bz}\right)+a \\ &= c\left|z-\frac{\overline{b}}{c}\right|^2-\frac{|b|^2-ac}{c} \end{aligned}$$

となるが，$c>0$ より $c\left|z-\dfrac{\overline{b}}{c}\right|^2\geqq 0$，(1)と $c>0$ より $-\dfrac{|b|^2-ac}{c}\geqq 0$ なので与えられた不等式は示された．

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。